ISSelmoulmed

Exercice 11

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

2) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Donner sa valeur sans calculs.

3) En posant $x=\cos t$, calculer I et comparer avec le résultat précédent.

Solution

solution :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$.

1). Les variations de f.

f est definie ssi $1-x^2\geq 0$

$\Rightarrow (1-x)(1+x)\geq 0$.

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

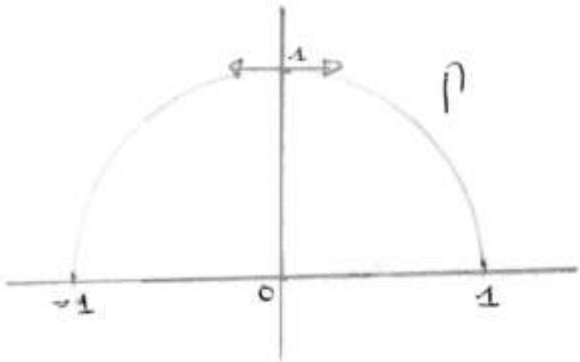
alors $D_f=[-1;1]$

* $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

* representation :



or $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$\Rightarrow y\geq 0$.

$\Rightarrow y^2=1-x^2$.

$\Rightarrow y^2+x^2=1$ alors Γ est un cercle de de centre O et de rayon $\boxed{r=1}$ alors Γ est un arc du cercle car $\boxed{y\geq 0}$

2) une interpretation geometrique de I :

I est l'aire du domaine plan limité par P et l'axe des abscisse et les droite $x = 0$ et $x = 1$

I : un quart du cercle de centre O et de rayon $r = 1$.

$$\Rightarrow I = \frac{r^2\pi}{4} = \frac{(1)^2 \times \pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

3). on pose $x = \cos t$

. calcule de I.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx \quad \forall x [0.1]$$

si $x = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

si $x = 1 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$.

$\Rightarrow \forall x \in [0.1] \Rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \boxed{dx = (-\sin t)\, dt.}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t}\,(-\sin t)\, dt$$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t \times \sin t\, dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt$$

or $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] - \frac{1}{2}[0 - 0]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

ISSel mau/me

Exercice 9

Soit la fonction définie par: $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n on pose: $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et montrer que: $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que: $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$.

4) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Solution

$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ $n \in \mathbb{N}$

où $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1). calcule de I_0

$I_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

on pose $u'(x) = \sqrt{1-x}$

alors $u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

car $-u^n$ sa dérivée est $-u'u^n$

et on a $1-x$ sa dérivée est -1.

$\Rightarrow I_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$I_0 = -\frac{2}{3}(1-1)\sqrt{1-1} + \frac{2}{3}(1-0)\sqrt{1-0}$

$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$

M.q. $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

or $\forall x \in [0,1]$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Rightarrow 0 \le 1-x \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1-x} \le 1$

or $x^n \ge 0$ $\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \le x^n\sqrt{1-x} \le x^n$

par passage à l'intégrale

pour $\forall x \in [0,1]$

$0 \le \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx$

$0 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}}$

2) M.q I_n est ↘ et $I_n \geq 0$.

pour $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x \leq 1$. $\forall x \in [0,1]$ $x^n \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

or $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$.

$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1}\sqrt{1-x} \leq x^n\sqrt{1-x}$

par passage à l'intégrale pour $x \in [0;1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

alors I_n est decroissante et $I_n \geq 0$.

* comme I_n est decroissante et minorée par 0. alors I_n est convergente

* or. $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

d'apres gendarme.

(2)

3)- M.q. $(2n+3)I_n = 2n I_{n-1}$

or $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = \overbrace{\left[-x^n\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1}^{0} - \int_0^1 -\frac{2}{3}nx^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$

$\Rightarrow I_n = +\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n$

$\Rightarrow I_n\frac{(2n+3)}{\cancel{3}} = \frac{2n}{\cancel{3}}I_{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{(2n+3)I_n = 2n I_{n-1}}$

4- prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$I_n \overset{?}{=} 2^{2n+2} \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

or $I_n = \frac{2n}{(2n+3} I_{n-1}$

pour $n = 1$

$$\cancel{I_1} = \frac{2}{5} I_0$$

pour $n = 2$

$$\cancel{I_2} = \frac{4}{7} \cancel{I_1}$$

$n = 3$ $\cancel{I_3} = \frac{6}{9} \cancel{I_2}$

$n = n$ $I_n = \frac{2n}{2n+3} \cancel{I_{n-1}}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (2n+3)} I_0$$

or $I_0 = \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow I_n \ \frac{2 \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \cdots 2 \times n \times 2}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (2n+3) 3}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^{n+1} \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \cdots\cdots n}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \cdots\cdots (2n+3)}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^{n+1} n!}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \cdots (2n+3)}$$

③

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^{n+1} \times n! \times 2 \times 4 \times 6 \cdots 2(n+1)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \cdots 2(n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}$$

!

Issel mou/med

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soient a et b des réels dans I.

Prouver que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

2) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

Montrer que I=J. Calculer I+J. En déduire I et J.

3) Calculer $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}) dx$.

solution:

1) f est continue sur I ouvert. et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{?}{=} \int_a^b f(a+b-x)dx$$

on pose $\boxed{t = a+b-x}$

$\Rightarrow \boxed{x = a+b-t}$

si $x = a \Rightarrow \boxed{b = t}$

si $x = b \Rightarrow \boxed{a = t}$

$\Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt)$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)dt$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx}$$

(1)

2) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

on pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

* $a = 0 \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$$

(1) $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} f(0 + \frac{\pi}{2} - x)dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} f(\frac{\pi}{2} - x)dx$.

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^3(\frac{\pi}{2} - x)} dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx = J$

$\Rightarrow \boxed{I = J}$

car $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

suite

Calcule de $I + J$.

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} dx.$$

$$I + J = [x]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{I + J = \frac{\pi}{2}}$$

or $I = J$.

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$$

3)- calcule de k.

$$k = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x})\,dx.$$

$$\Rightarrow k = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\sin x}\,dx$$

soit $I_1' = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx$

et $I_2' = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\sin x}\,dx$

$$\Rightarrow I_1' = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\,dx$$

$$\Rightarrow I_1' = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx$$

$$\Rightarrow I_1' = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\sin x}\,dx = I_2'$$

$$\Rightarrow I_1' = I_2'$$

$$\Rightarrow k = I_1' - I_2' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 0}$$

ISSelmou / med

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.
2) Donner l'expression de f(x).

Solution

solution :

$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

1) pour que f est une fonction affine il suffit que sa fonction derivée est constante

Comme les fonction $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$ sont derivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $g(t) = \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[-1; 1]$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-t^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et comme ~~cos x et~~ $\cos x \in [-1, 1]$ et $\sin x \in [-1; 1]$

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ la fonction f est derivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

et $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = v'(x) g(v(x)) - u'(x) g(u(x))$

$= \cos x \sqrt{1-\sin^2 x} - (-\sin x)\sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \cos x |\cos x| + \sin x |\sin x|$

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc f est une fonction affine.

2) Comme $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $f'(x) = 1$ il existe une constante b telle que. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x) = x + b$

Suite :

Or $\frac{\pi}{4} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et

$$f(\frac{\pi}{4}) = \int_{\cos\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\, dt = 0.$$

Car. $\int_a^a g(t)\, dt = 0.$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 0 = \frac{\pi}{4} + k = 0.$

$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{\pi}{4}}$

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - \frac{\pi}{4}}$